

## Erros Numéricos da Equação de Richards Utilizando o Método dos Volumes Finitos

Michael Mannich, Alexandre K. Guetter

Universidade Federal do Paraná

mannich@ufpr.br; guetter.dhs@ufpr.br

Recebido: 30/03/10 - revisado: 10/12/10 - aceito: 28/07/11

---

### RESUMO

A Equação de Richards é uma equação diferencial parcial parabólica não-linear que governa o processo de infiltração de água no solo. Uma solução analítica é utilizada para avaliar a acurácia e desempenho da solução da equação pelo método de volumes finitos. As condições de contorno utilizadas são potencial capilar prescrito constante no bordo inferior e fluxo prescrito constante no contorno superior. Foram simulados nove casos variando o refinamento da malha no tempo e no espaço. A evolução temporal dos erros apresenta um comportamento similar a um processo advectivo-difusivo, propagando o erro na direção do fluxo e atenuando-o com o avanço do tempo. Os erros são tão menores e a conservação de massa é tão melhor quanto maior o refinamento no tempo e, são pouco dependentes do refinamento no espaço. Da mesma forma é o comportamento do erro de variáveis secundárias.

**Palavras-chave:** volumes finitos; equação de Richards; solução analítica; erros numéricos.

---

### INTRODUÇÃO

A infiltração e movimento de água no solo são importantes para solucionar problemas práticos em áreas como hidrologia, ciência dos solos, irrigação e drenagem, gestão de recursos naturais e outros (Ross, 1990). Para isto, faz-se uso de soluções analíticas ou numéricas da Equação de Richards (Richards, 1931) que governa o escoamento transiente da água em solos, ou até modelos empíricos (Chow; Maidment; Mays, 1988).

As soluções analíticas da Equação de Richards são comumente usadas para avaliar e comparar o desempenho e a acurácia de esquemas numéricos (Ross; Parlange, 1994). As soluções analíticas da equação diferencial também oferecem informações importantes sobre a física do fenômeno e permitem identificar a relação e dependência do resultado com as variáveis. Em contrapartida, métodos numéricos, que podem ser ferramentas poderosas para resolver problemas complexos e não-lineares, usualmente não fornecem informações suficientes sobre a solução (Menziani; Pugnaghi; Vincenzi, 2006).

Todavia, soluções analíticas da Equação de Richards são poucas e difíceis de obter. A maioria delas deriva de linearizações da equação, baseadas em considerações a respeito da difusividade da água

no solo e da dependência da condutividade hidráulica com o teor de umidade do solo (Basha, 2000). As considerações mais comuns são: a dependência exponencial da condutividade hidráulica com o potencial capilar e a difusividade da água no solo constante ou proporcional ao inverso do teor de umidade.

Dada a raridade de soluções analíticas da equação de Richards e a grande amplitude de aplicações em diversas áreas da ciência o objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho de esquemas numéricos para solucionar a Equação de Richards sob a condição de fluxo na superfície.

Os resultados do esquema numérico de volumes finitos são confrontados com uma solução analítica desenvolvida por Mannich (2008), a partir da qual são avaliados os erros numéricos.

Escolheu-se estudar a solução da equação de Richards com o método dos volumes finitos, pois há pouca literatura a respeito, e soluções numéricas com os métodos de diferenças finitas e elementos finitos já foram amplamente estudadas e apresentam grandes erros de balanço de massa, principalmente em malhas mais grosseiras (Celia et al., 1990).

Este artigo está organizado em 4 sessões: apresentação da solução analítica, descrição do esquema numérico, avaliação dos erros numéricos e desempenho do método, conclusões das análises.

## SOLUÇÃO ANALÍTICA

A Equação de Richards, que governa o escoamento não-saturado vertical 1-D é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z_*} \left[ K_* (\psi) \frac{\partial (\psi + z_*)}{\partial z_*} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t_*} \quad (1)$$

onde  $z_*$  [L] é a coordenada vertical, positiva no sentido de baixo para cima,  $K_*$  [L/T] é a condutividade hidráulica não saturada que é função do potencial capilar  $\psi$  [L],  $\theta$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a umidade, e  $t_*$  [T] representa o tempo.

A dependência da condutividade hidráulica e da umidade com relação ao potencial capilar são dadas, respectivamente, pelas seguintes relações constitutivas (sendo a primeira proposta por Gardner (1958)):

$$K_* = K_s e^{\alpha \psi} \quad (2)$$

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} \quad (3)$$

onde  $K_s$  [L/T] é a condutividade hidráulica saturada,  $\theta_r$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a de umidade residual,  $\theta_s$  [L<sup>3</sup>/L<sup>3</sup>] é a umidade de saturação, e  $\alpha$  [1/L] é o parâmetro que avalia a pressão de entrada de ar e que representa a taxa de redução da condutividade hidráulica e da umidade para  $\psi$  cada vez menor.

As condições de contorno aplicadas são potencial capilar prescrito  $\psi_0$  no bordo inferior da camada de solo,  $z_* = 0$ , e fluxo prescrito constante  $q_B^*$  na superfície do solo,  $z_* = L_*$ .

A condição inicial é a distribuição do potencial capilar correspondente a solução estacionária da equação (1) sob a mesma condição de potencial capilar prescrito  $\psi_0$  no bordo inferior e fluxo prescrito  $q_A^*$  na superfície, a qual é dada por (Mannich, 2008):

$$\psi(z, 0) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ q_A - (q_A - e^{\alpha \psi_0}) e^{-\alpha z} \right] \quad (4)$$

Mannich (2008) obteve uma solução analítica para estas condições, linearizando a equação (1) através das equações (2) e (3), a qual é solucionada pela transformação de Laplace fornecendo:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ q_B - (q_B - e^{\alpha \psi_0}) e^{-z} - 4(q_B - q_A) \cdot e^{(L-z)/2} e^{-t/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[L\lambda_n] \text{sen}[z\lambda_n] e^{-\lambda_n^2 t}}{1 + L/2 + 2L\lambda_n^2} \right\} \quad (5)$$

O valor de  $\lambda_n$  é obtido através da  $n$ -ésima raiz positiva da equação característica:

$$\tan(L\lambda_n) + 2\lambda_n = 0 \quad (6)$$

Por conveniência foram definidos alguns parâmetros adimensionais:

$$z = \alpha z_* \quad \text{tal que} \quad L = \alpha L_* \quad (7)$$

$$t = \alpha K_s t_* / (\theta_s - \theta_r) \quad (8)$$

$$q_A = q_A^* / K_s \quad \text{e} \quad q_B = q_B^* / K_s \quad (9)$$

A vazão específica de descarga a uma determinada altura  $z$  da camada de solo para qualquer tempo é obtida pela expressão:

$$q_t = K_s q_B - 2K_s (q_B - q_A) e^{L/2} e^{-t/4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\lambda_n \cos(z\lambda_n) + \text{sen}(z\lambda_n)] \text{sen}(L\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 t}}{1 + L/2 + 2L\lambda_n^2} \quad (10)$$

A solução analítica apresentada foi também obtida por Srivastava e Yeh (1991), a qual é uma particularização da solução desenvolvida por Mannich (2008), cuja condição de contorno superior contempla um fluxo transiente.

## SOLUÇÃO NUMÉRICA

A discretização da equação (1) pelo método dos volumes finitos é realizada por meio da integração em volumes de controles elementares e interpolação. O resultado é uma equação algébrica.

A equação (1) é escrita em função de duas variáveis  $\theta$  e  $\psi$ , portanto, tanto para soluções analíticas quanto numéricas é necessário uma equação que relacione ambas, neste trabalho dada pela equação (3). Para facilitar a solução numérica é preciso escrevê-la em função de uma das variáveis. A forma mais comum é deixá-la em função apenas da variável  $\psi$  (Célia; Bouloutas; Zarba, 1990):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \frac{\partial(\psi + z)}{\partial z} \right] = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (11)$$

$$C = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \alpha(\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} \quad (12)$$

Milly (1988) mostrou que resolver a equação (11) (base- $\psi$ ) gera maiores erros na conservação de massa devido a avaliação do termo  $C(\psi)$ . No entanto, Rathfelder e Abriola (1994) afirmam que bons resultados no balanço de massa podem ser obtidos através de uma discretização apropriada do termo  $C(\psi)$ . Segundo Hills et al. (1989) o maior benefício de resolver a equação de Richards na base- $\theta$  é que as funções hidráulicas do solo geralmente apresentam menor não linearidade em relação à equação na base- $\psi$ . Todavia na base- $\psi$  a aplicação não possui problemas em solos em camadas, nos quais  $\psi$  é contínua na interface enquanto  $\theta$  não é (Brunone et al., 2003), e apesar de ser não conservativo (Zaidel; Russo, 1992) a forma usualmente mais utilizada é a base- $\psi$  (Hills et al., 1989).

Os métodos numéricos sofrem com problemas de erros numéricos e conservação de massa. A solução da equação de Richards na forma mista não produz erros de conservação de massa, todavia boa conservação de massa não garante bons resultados numéricos. Em vista disso é mais comum resolver a equação na base- $\psi$  (Célia; Bouloutas; Zarba, 1990).

Isto posto, a equação de Richards será resolvida na base- $\psi$  pois futuramente pretende-se estender o modelo desenvolvido também para solos em diversas camadas homogêneas.

### Volumes finitos

A equação (11) foi discretizada em volumes finitos com formulação implícita, na qual o valor da variável que entra no cálculo do fluxo difusivo é tomado como a média aritmética do valor da variável no início e no fim do intervalo de tempo, notadamente conhecido como método de Crank-Nicolson. A interpolação do termo difusivo foi aproximada como uma função linear de diferenças centrais entre os pontos nodais (Maliska, 2005). A equação resultante apresenta a forma (Mannich, 2008):

$$a_p \psi_i^{n+1} = a_E \psi_{i+1}^{n+1} + a_W \psi_{i-1}^{n+1} + b_p \quad (13)$$

onde

$$a_E = \frac{K_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (14)$$

$$a_W = \frac{K_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (15)$$

$$a_p = a_E + a_W + \frac{C_i^n + C_i^{n+1}}{\Delta t} \quad (16)$$

$$b_p = \left[ \frac{C_i^n + C_i^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{(K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n)}{2\Delta z^2} \right] \psi_i^n \quad (17)$$

$$+ \frac{K_{i-1/2}^n}{2\Delta z^2} \psi_{i-1}^n + \frac{K_{i+1/2}^n}{2\Delta z^2} \psi_{i+1}^n + \frac{(K_{i+1/2}^{n+1} + K_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta z}$$

e  $K$  foi calculado através da média geométrica dada por:

$$K_{i\pm 1/2}^n = \sqrt{K_i^n K_{i\pm 1}^n} \quad (18)$$

Haverkamp e Vauclin (1979) avaliaram a solução por diferenças finitas utilizando diversas funções para avaliar a condutividade hidráulica na interface entre os nós concluindo que a função com melhor desempenho é a média geométrica.

O índice  $i$  representa o espaço e  $n$  o tempo. As equações de (14) a (17) valem apenas para os nós internos,  $i=2, N-1$ . No método dos volumes finitos só há volumes dentro das fronteiras e a condição de contorno inferior é um potencial capilar constante  $\psi_0$ , que se dá na face do volume adjacente à fronteira. Desta forma a condição na fronteira inferior,  $i=1$ , utilizando um volume fictício, na forma da equação (13) altera os parâmetros:

$$a_W = 0 \quad (19)$$

$$a_p = -a_E = 1 \quad (20)$$

$$b_p = \psi_0 \quad (21)$$

Para a condição de contorno superior,  $i=N$ , o fluxo conhecido atravessa a face do volume adjacente à fronteira. Utilizando um volume fictício na fronteira, os parâmetros apresentam a forma:

$$a_p = a_W = 1 \quad (22)$$

$$a_E = 0 \quad (23)$$

$$b_P = \left( \frac{q_B^* - K_{i-1/2}^{n+1}}{K_{i-1/2}^{n+1}} \right) \Delta z \tag{24}$$

A condição inicial foi tomada como a solução do estado estacionário, assim como na solução analítica. As equações anteriores podem ser facilmente simplificadas para o caso estacionário.

A Figura 1 apresenta um esquema do problema resolvido pelo método de volumes finitos.

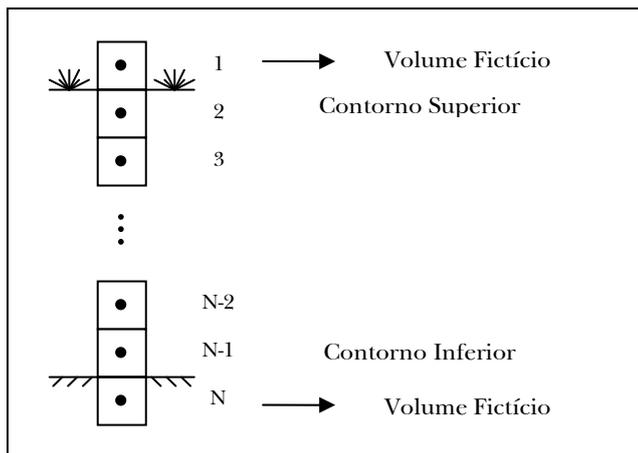


Figura 1 – Esquema do método dos volumes finitos.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A avaliação do desempenho computacional e da acurácia do método dos volumes finitos foi realizada confrontando seus resultados com a solução analítica apresentada. Foram simulados 9 casos, variando o refinamento da malha de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 – Numeração dos casos simulados

		dz (m)		
		0,1	0,01	0,001
dt (hr)	1	1	2	3
	0,1	4	5	6
	0,01	7	8	9

Para a simulação foi considerado um solo hipotético com características próximas de solos arenosos, para os quais a equação (3) pode ser aplicada. Os parâmetros adotados foram  $\theta_s = 0,5$ ,  $\theta_r = 0,1$ ,  $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $K_s = 3,0 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ ,  $\psi_0 = 0$  (lençol freático em  $z=0$ ),  $L_* = 1 \text{ m}$  (altura da coluna de so-

lo),  $q_A^* = 3,0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$  e  $q_B^* = 2,5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ . A duração da simulação foi de 100 horas, tempo para o qual a solução alcançou o estado estacionário. Na determinação da solução analítica o somatório das equações (5) e (11) foram realizadas até a convergência com erro inferior a  $1 \times 10^{-10}$  e a busca das raízes da equação (6) foi realizada por um método combinado de bissecção e Newton-Raphson também com erro de  $1 \times 10^{-10}$  (Mannich, 2008).

### Balanco de massa

O balanço de massa (BM) do método numérico é definido como a razão entre o volume de água acumulada e o fluxo líquido entre as faces do domínio (Célia; Bouloutas; Zarba, 1990). Esta definição é matematicamente expressa como:

$$BM = \sum_{i=1}^{N-1} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^0) \Delta z / \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ K_{N-1/2}^j \times \left[ \frac{\psi_N^j - \psi_{N-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] - K_{1/2}^j \left[ \frac{\psi_1^j - \psi_0^j}{\Delta z} + 1 \right] \right\} \Delta t \tag{25}$$

A Figura 2 apresenta a variação do balanço de massa com o tempo no início da simulação. Observa-se que o comportamento do BM é independente do refinamento no espaço, exceto por pequenas diferenças imperceptíveis graficamente. E quão mais refinada a malha no tempo, melhor o BM e, mais rapidamente converge para a unidade, o que indica conservação de massa. O mesmo não ocorre para o caso das diferenças finitas, na qual o BM converge mais lentamente para 1 e é maior ou menor do que 1, ou seja, ora produz massa, ora consome, dependendo do refinamento da malha (Mannich, 2008).

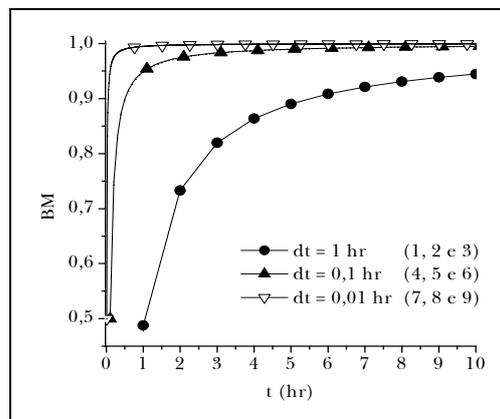


Figura 2 – Balanço de massa

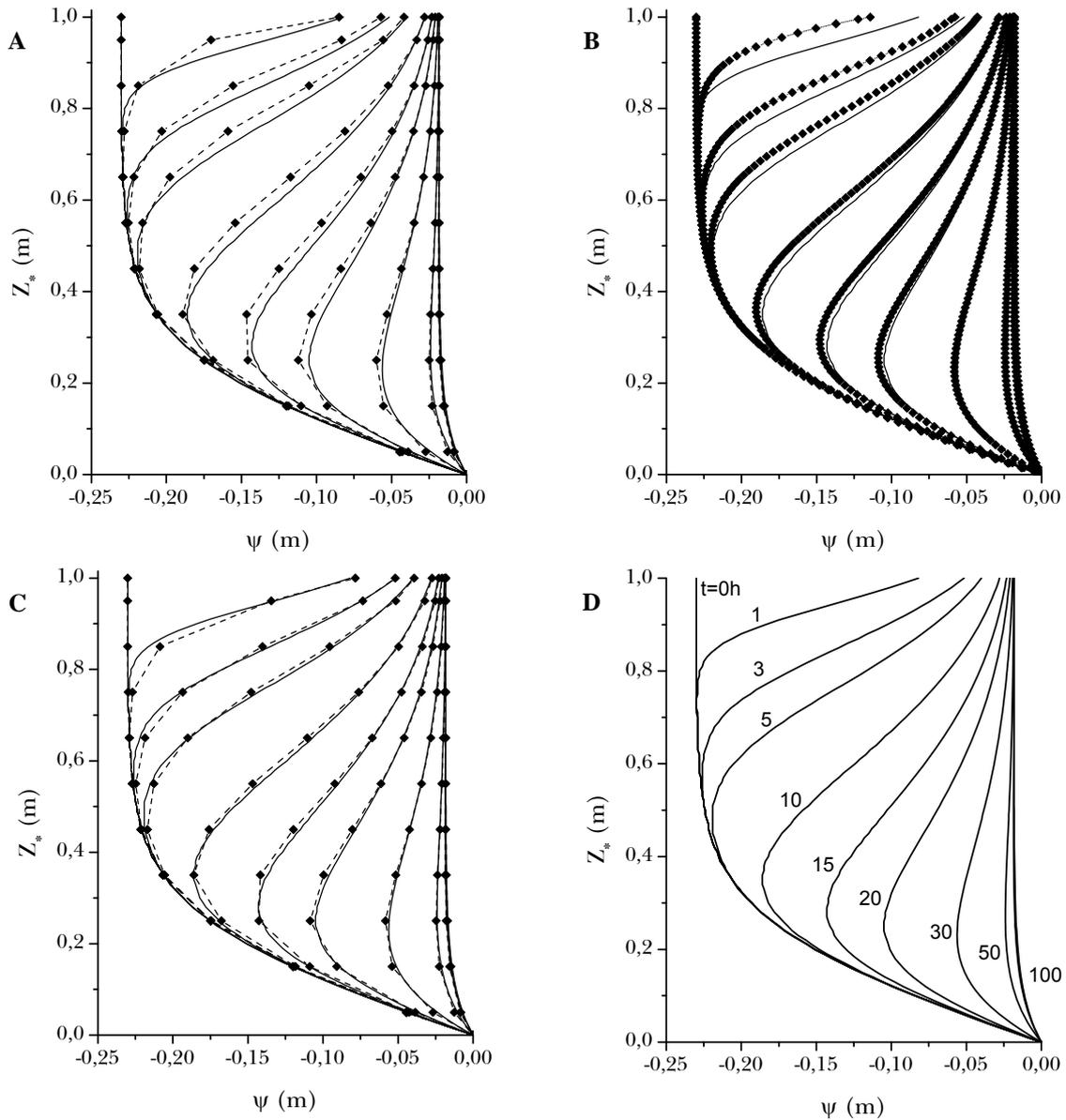


Figura 3 – Comparação analítico – numérico. A – caso 1. B casos 2 e 3. C casos 4 e 7. D casos 5,6,8, e 9. (—) Solução Analítica; (—◆—) Volumes Finitos.

### Erros numéricos

Os erros numéricos são oriundos do método de aproximação numérica, do refinamento da malha e de procedimentos iterativos no processo de cálculo. O erro relativo é definido como:

$$\varepsilon_i^j = \frac{\phi_i^j - \psi_i^j}{\phi_i^j} \quad (26)$$

onde,  $\phi$  e  $\psi$  representam, respectivamente, os valores das soluções analítica e numérica no ponto correspondente do tempo e espaço.

A Figura 3 apresenta a comparação gráfica dos resultados analíticos ( $\phi$ ) e numéricos ( $\psi$ ) dos casos simulados em alguns instantes de tempo. A Figura 4 ilustra a evolução do erro relativo, dado pela equação (26), nos mesmos instantes de tempo. O instante de tempo é dado em horas e indicado ao lado de cada curva.

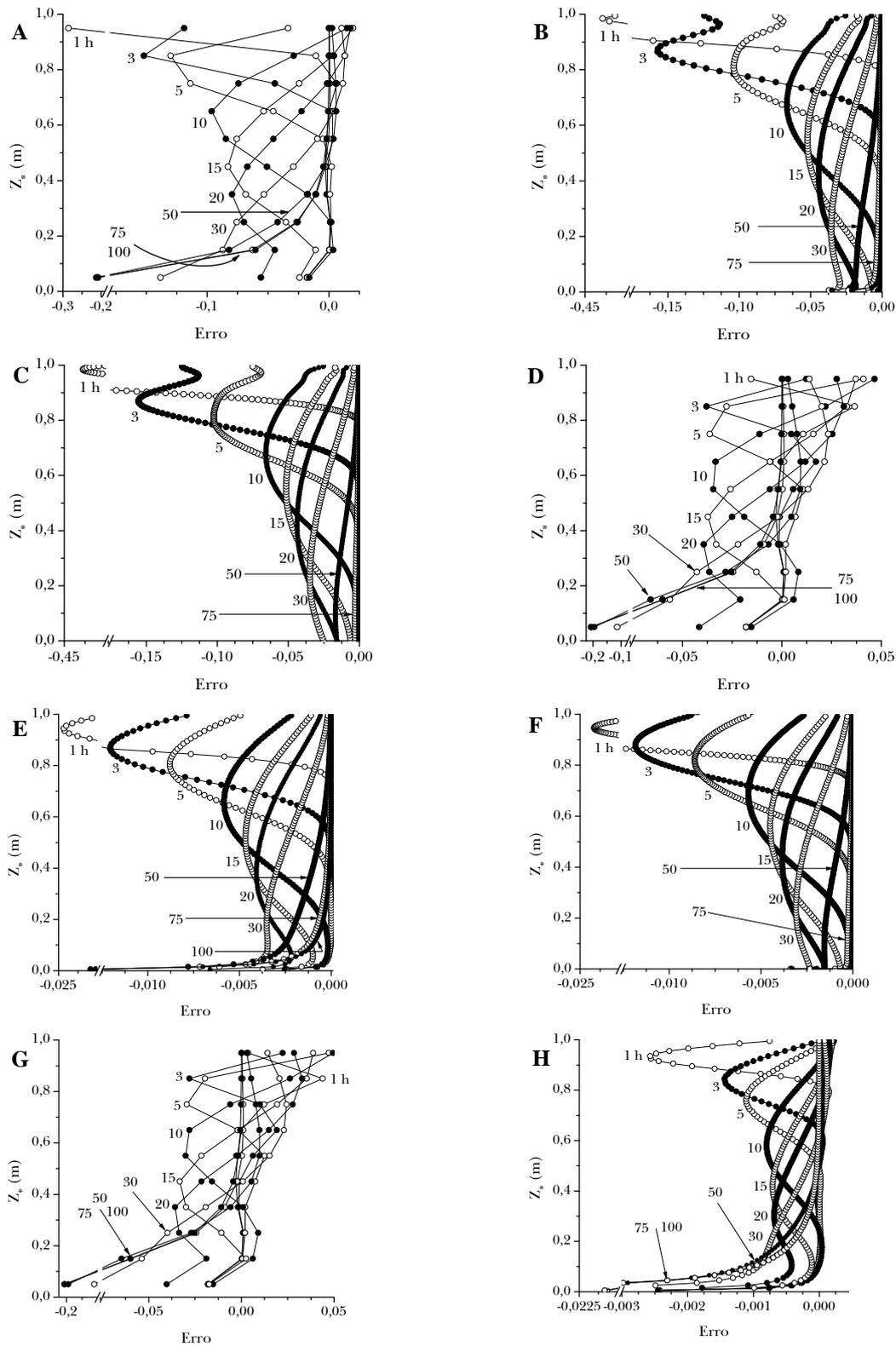


Figura 4 – Evolução temporal dos erros dos casos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, representados na ordem por A, B, C, D, E, F, G, H.

Observa-se que para o caso 1 (Figura 3A e 4A) o esquema de volumes finitos fornece majoritariamente valores ligeiramente à esquerda da curva analítica, ou seja, valores menores (mais negativos) de  $\psi$  do que a solução analítica para uma mesma profundidade,  $z_s$ . Observa-se o mesmo comportamento para os casos 2 e 3 (Figura 3B, 4B e 4C). Para os casos 4 e 7 (Figura 3C, 4D e 4G) o valor numérico ora assume valores maiores ora menores do que a solução analítica, de forma que o erro relativo é ora positivo, ora negativo. Para os casos 5, 6, 8 e 9 (Figura 3D) o erro é pequeno e o resultado numérico sobrepõem-se à curva analítica, graficamente.

A partir da Figura 4 observa-se que a evolução temporal do erro é semelhante à propagação de um hidrograma num canal, um fenômeno difusivo-advectivo.

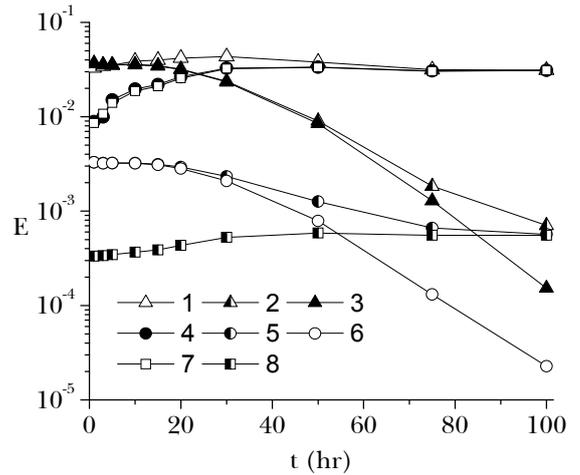
Nos primeiros instantes de tempo os erros são maiores junto ao bordo superior, reduzindo-se com o avanço do tempo e se sendo propagado na direção da base da coluna de solo. Isso pode ser visualizado pelo avanço do valor máximo do erro em cada instante de tempo. Dessa forma o erro apresenta um caráter cinemático devido à propagação e difusivo devido à sua atenuação conforme o avanço no tempo. Estes comportamentos também são observados na análise do erro absoluto (numerador da equação (26)) e no método das diferenças finitas, porém em magnitudes distintas (Mannich, 2008).

A análise conjunta das Figuras 3 e 4 correspondentes a um mesmo caso permitem observar que a propagação do erro acompanha o avanço da frente de molhamento na coluna do solo. À medida que a água infiltra, a umidade aumenta, e o potencial capilar também (torna-se menos negativo). No início da simulação os erros próximos à base do solo são pequenos. No entanto, conforme o avanço da água infiltrada, atingindo a base do solo, os erros aumentam. No caso do método das diferenças finitas a aplicação da condição de contorno inferior pode se dar exatamente sobre o contorno, e os erros são consequentemente menores nesta região (Mannich, 2008).

**Erros gerais**

A Figura 5 apresenta o erro relativo médio ao longo do espaço em alguns tempos avaliados, o qual é dado pela expressão:

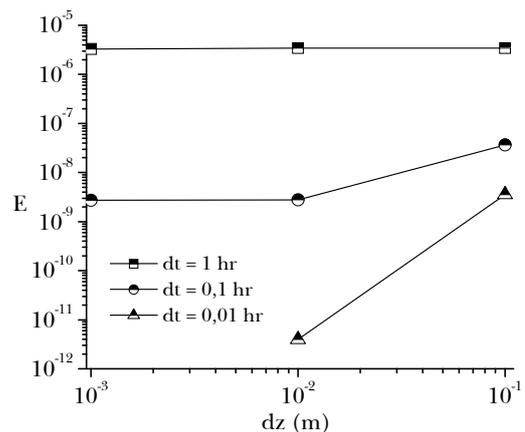
$$E = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left| \frac{\phi_i^j - \psi_i^j}{\phi_i^j} \right| \tag{26}$$



**Figura 5 – Evolução temporal do erro relativo médio ao longo do espaço**

Observa-se pela Figura 5 que o erro para uma mesma discretização no tempo tende ao mesmo valor quando o tempo simulado tende a um novo estado estacionário.

A Figura 6 ilustra o erro relativo de cada simulação. O método dos volumes finitos apresenta um erro decrescente com o refinamento da malha tanto no tempo quanto no espaço. No entanto, o refinamento no tempo garante maior redução do erro do que o refinamento no espaço, para o qual a partir de um certo incremento de espaço passa a não reduzir o erro significativamente como se observa na Figura 6. E para o caso 9 o erro é praticamente zero.



**Figura 6 – Avaliação dos erros médios quadráticos com o refinamento da malha**

**Erros de variáveis secundárias**

Muitas vezes na engenharia, variáveis secundárias são o foco de interesses na solução de equações diferenciais, calculadas a partir da solução numérica. Estudamos o caso do fluxo de água na camada inferior do solo,  $z = 0$ , para o qual também há solução analítica dada pela equação (10) fazendo  $z = 0$ . A Figura 7 ilustra a taxa de infiltração constante e a descarga em  $z = 0$ , a qual é crescente até atingir um valor constante e igual ao valor da infiltração, caracterizando o novo estado estacionário, no qual o fluxo que entra é igual ao que sai.

Conhecido o potencial capilar em cada ponto no espaço e no tempo, pode-se calcular o fluxo numa determinada elevação e confrontá-la com a solução analítica. As Figuras 8 e 9 apresentam a variação do erro relativo entre a solução analítica e o cálculo do fluxo em  $z = 0$ . O erro relativo é calculado por:

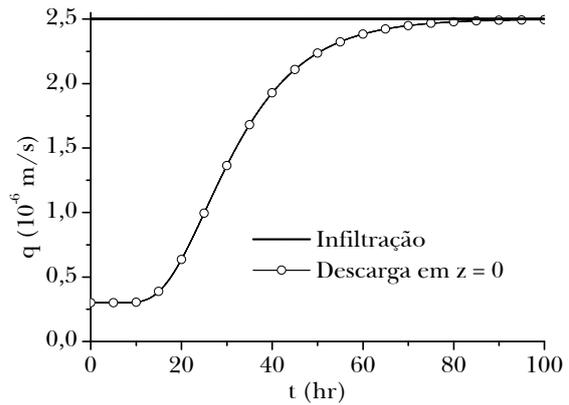
$$\Delta_i^j = (q_i^j - \Phi_i^j) / q_i^j \tag{27}$$

onde,  $q$  é a solução analítica e  $\Phi$  é o fluxo calculado numericamente através de:

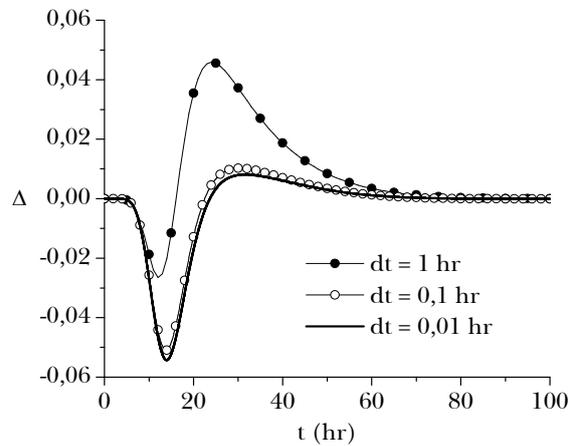
$$\Phi_i^j = K_{i-1/2}^j \left[ \frac{\Psi_i^j - \Psi_{i-1}^j}{\Delta z} + 1 \right] \tag{28}$$

O erro do fluxo para o método de volumes finitos apresenta um comportamento similar em cada refinamento no espaço. Na Figura 8 a evolução temporal do erro do fluxo apresenta o mesmo comportamento para  $dz = 0,1$  m, alterando em valor conforme o refinamento temporal. Inicialmente o resultado numérico fornece valores cada vez maiores que o analítico, posteriormente valores cada vez menores e depois tende a fornecer resultados mais próximos do analítico, ao mesmo tempo em que a solução tende ao novo estado estacionário.

Na Figura 9, que apresenta a evolução do erro do fluxo para  $dz = 0,01$  m e  $dz = 0,001$  m, o erro máximo é da mesma ordem de grandeza que para  $dz = 0,1$  m e o comportamento é similar. Todavia, os valores negativos alcançados são muito pequenos e graficamente imperceptíveis na escala apresentada. O valor numérico é predominantemente menor do que o analítico, apresentando erro com um crescimento rápido e posteriormente uma redução exponencial tendendo ao erro nulo, quando a solução também tende ao estado estacionário.



**Figura 7 – Infiltração e descarga em  $z = 0$**



**Figura 8 – Erros no cálculo do fluxo na base para  $dz = 0,1$  m.**

O erro médio relativo em módulo para esta variável secundária é dado pela expressão:

$$\Omega = \frac{1}{T} \cdot \sum_{j=1}^T \left| \frac{q_i^j - \Phi_i^j}{q_i^j} \right| \tag{29}$$

A Figura 10 ilustra a variação do erro médio relativo do fluxo na base da coluna de solo em função do refinamento da malha numérica. Observa-se que para  $dz = 0,1$  m o erro é similar e independente de  $dt$ . Reduzindo-se  $dz$  o erro também reduz, mas é limitado ao refinamento no espaço. Novamente a conclusão que se chega é que o erro é mais influenciado pelo refinamento temporal do que espacial.

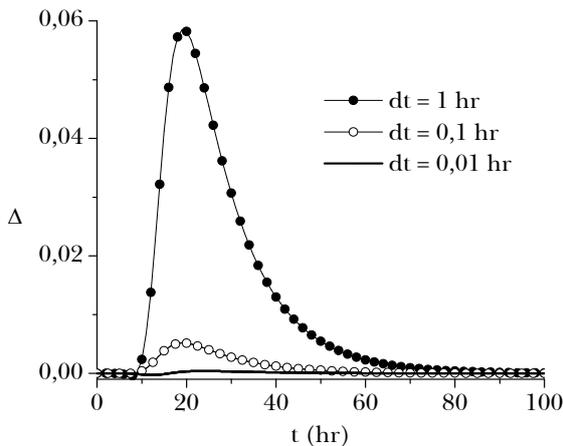


Figura 9 – Erros no cálculo do fluxo na base para  $dz = 0,01$  m e  $dz = 0,001$  m

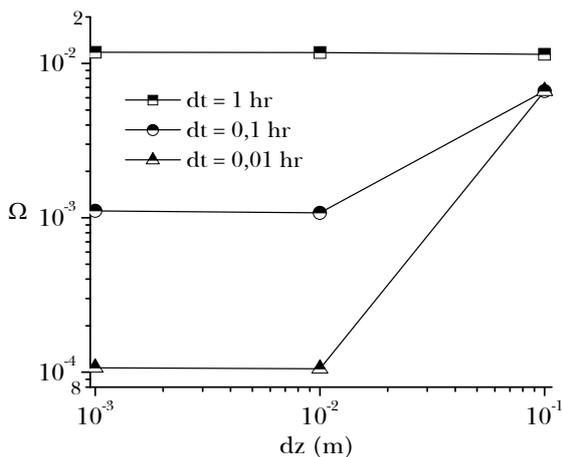


Figura 10 – Erro médio relativo do fluxo em  $z = 0$

## CONCLUSÕES

O método dos volumes finitos é eficiente na solução da equação de Richards, comparado com a solução analítica. Os erros numéricos diminuem conforme o avanço do cálculo no tempo, tanto os erros da variável dependente quanto das variáveis secundárias, calculadas a partir daquela. Os erros apresentam redução mais significativa com o refinamento no tempo do que no espaço.

O balanço de massa do sistema também é mais sensível às mudanças no passo de tempo do que no de espaço, tendendo mais rapidamente à unidade (que indica conservação total) quanto menor o passo de tempo. Mannich (2008) comparou o balanço de massa pelo método dos volumes finitos e das diferenças finitas, demonstrando que o primeiro é muito mais eficiente na conservação da massa e menos variável em relação ao refinamento da malha.

O tempo de processamento varia de acordo com a configuração da máquina e o refinamento da malha. Mannich (2008) comparou os resultados do tempo de processamento do método dos volumes finitos com o método das diferenças finitas, para um mesmo refinamento, sendo o método dos volumes finitos sempre superior em tempo de processamento, especialmente nos casos 4, 7 e 8.

Os erros seriam menores caso fosse solucionada numericamente a equação (1) linearizada através das equações (2) e (3). A solução da equação linearizada elimina o problema do cálculo da condutividade hidráulica na interface entre os volumes de controle, reduzindo a não linearidade. Esta análise será objeto de um próximo estudo.

## REFERÊNCIAS

- BASHA, H. A. (2000). Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table, *Water Resources Research*, 36(9), 2567-2573.
- BRUNONE, B.; FERRANTE, M.; ROMANO, N.; SANTINI, A. (2003) Numerical simulations of one-dimensional infiltration into layered soils with the Richards equation using different estimates of the interlayer conductivity. *Vadose Zone Journal*, 2, 193-200.
- CELIA, M. A.; BOULOUTAS, E. F; ZARBA, R. L. (1990) A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*, 26(7), 1483-1496.
- CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. (1988). *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York.
- GARDNER, W. R. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Science*. 85, 228-332.
- HAVERKAMP, R.; VAUCLIN, M. (1979) A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. *Water Resources Research*, 15(1), 181-187.
- HILLS, R. G.; PORRO, I.; HUDSON, D. B.; WIERENG, P. J. (1989) Modeling one-dimensional infiltration into very

- dry soils. 1. Model development and evaluation. *Water Resources Research*, 25, 1259-1269.
- MANNICH, M. (2008). Desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas da equação de Richards. *Dissertação de Mestrado*, UFPR, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, Curitiba, Brasil.
- MENZIANI, M.; PUGNACHI, S.; VINCENZI, S. (2006). Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions, *Journal of Hydrology*, 332, 214-225. iss. 1-2
- MILLY, P. C. D. (1988) Advances in modeling of water in the unsaturated zone. *Transport in porous media*, 3, 491-514.
- RATHFELDER, K.; ABRIOLA, L. M. (1994) Mass conservative numerical solutions of the head-based Richards equation. *Water Resources Research*, 30(9), 2579-2586.
- RICHARDS, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids in porous mediums, *Physics*, 1, 318-333.
- ROSS, P. J. (1990). Efficient numerical methods for infiltration using Richards equation. *Water Resources Research*, 26(2), 279-290.
- ROSS, P. J.; PARLANGE, J. Y. (1994). Comparing exact and numerical solutions of Richards equation for one-dimensional infiltration and drainage. *Soil Science*, 157(6), 341-344.
- SRIVASTAVA, R.; YEH, T. C. J. (1991). Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. *Water Resources Research*, 27(5), 753-762.
- ZAIDEL, J.; RUSSO, D. (1992) Estimation of finite difference interblock conductivities for simulation of infiltration into initially dry soils. *Water Resources Research*, 28(9), 2285-2295.

*time advances. Errors and mass conservation are independent of the space grid and are much improved when reducing the time step. The behavior of secondary variables error is the same.*

**Key-words:** *Finite volumes; Richards equation; analytic solution; numerical errors.*

### ***Numerical Errors of the Richards Equation Using the Finite Volumes Method***

#### ***ABSTRACT***

*The Richards equation is a non-linear partial differential equation that governs the process of infiltration and flow in unsaturated soils. An analytical solution is used to evaluate the accuracy and performance of the equation solution using the finite volumes method. The lower boundary condition is a prescribed pressure head and the upper boundary condition is a constant flow rate. Nine cases were simulated by varying the mesh refinement in time and space. The temporal evolution of the errors behaves similarly to an advective-diffusive process, propagating the error in the direction of flow and attenuating it as*